

Стохастическое моделирование движения поездов в задачах интервального регулирования



П. А. Попов,
руководитель
центра СУиОБД,
ОАО «НИИАС»

Поезда, последовательно движущиеся в одном направлении, при некоторых обстоятельствах оказывают влияние друг на друга. Вероятность возникновения коллизии, то есть критического сближения поездов, во многом зависит от интервала попутного следования. Моделируя движение поездов на основе броуновской функции для различных видов автоблокировки, можно оценить вероятность возникновения коллизий в зависимости от этого интервала, характеристик поездов и их скорости, а кроме того – определить, каким должен быть интервал следования поездов при заданном уровне возникновения коллизий.

К сожалению, современные поезда не могут двигаться точно по графику и равномерно, поэтому расстояние между двумя последовательно идущими поездами постоянно меняется. Это обусловлено разными тяговыми и тормозными характеристиками поездов, профилем пути, манерой ведения поездов разными машинистами и другими факторами. В такой ситуации полезно понимать, насколько часто впереди идущий поезд оказывает воздействие на сзади идущий поезд. При трехзначной системе сигнализации таким воздействием считается появление желтого сигнала светофора перед сзади идущим поездом. Поэтому в данной работе моделируется движение поездов и оценивается вероятность влияния поездов друг на друга в зависимости от интервала попутного следования, характеристик поезда, скоростей движения.

Моделирование движения поездов

Для моделирования неравномерности следования поездов наилучшим образом подходит стандартная броуновская функция (другое название – винеровский процесс). Данный процесс применим для моделирования задержек поезда в связи с его следующими основными свойствами:

- $W(0) = 0$;
- $W(t)$ является непрерывной функцией от t ;
- Функция $W(t)$ независима и ее приращения имеют нормальное распределение $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

Тогда модель из N поездов можно представить в виде стохастического дифференциального равенства:

$$dX_i(t) = V_{M_i}(t)dt + \sigma_i(t)dW_i(t), \quad i \in I, \quad (1)$$

где $W_i(t)$ есть стандартная броуновская функция (винеровский процесс) и $I = \{1, \dots, N_T\}$.

То есть приращение координаты X i -го поезда равно сумме скорости поезда, умноженной на приращение времени, плюс случайная составляющая, моделируемая винеровским процессом.

Пусть поезда отправляются из точки $X_i(t) = 0$ равномерно во время, определяемое

$$t_{\text{отпр}}(i) = iT_{\text{отпр}};$$

$$X_i(iT_{\text{отпр}}) = 0;$$

$$T_{\text{отпр}} = \frac{ET_{\text{день}}}{N_T}.$$

Для упрощения расчетов сделаем следующие допущения:

$$V_{M_i}(i) = V_M, \quad \forall (i, t) \in IT \text{ (одна скорость);}$$

$$\sigma_i(i) = \sigma, \quad \forall (i, t) \in IT \text{ (один класс);}$$

$$W_i(t) \text{ и } W_j(t) \text{ независимы, если } i \neq j \\ \forall (t) \in T \text{ (независимость).}$$

Тогда равенство (1) может быть записано в виде (данное равенство известно как броуновское движение с дрейфом):

$$dX_i(t) = Vdt + \sigma dW_t, \quad (2)$$

где случайная величина W_t есть броуновское движение.

Целью моделирования является нахождение отношения между пропускной способностью линии (измеряется в N_T) и риском, определяемым как вероятностью возникновения коллизии. Под коллизией подразумевается сближение двух последовательных поездов, когда дистанция между ними становится меньше критической границы. Пусть $p_w(x; t)$ есть плотность распределения стандартного броуновского движения:

$$p_w(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (3)$$

Пусть $t = iT_{\text{отпр}}$ есть время отправления i -го поезда, тогда вероятность того, что i -й поезд прибудет в x_i во время t есть

$$p_w(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - iT_{\text{отпр}})}} e^{-\frac{(x - V(t - iT_{\text{отпр}}))^2}{2\sigma^2(t - iT_{\text{отпр}})}}. \quad (4)$$

X_i имеет нормальный закон распределения:

$$X_i \sim N(V(t - iT_{\text{отпр}}), \sigma^2(t - iT_{\text{отпр}})). \quad (5)$$

Тогда дистанция между двумя поездами $X_i - X_{i+1}$ также распределена по нормальному закону:

$$X_i - X_{i+1} \sim N(VT_{\text{отпр}}, \sigma^2(2t - (2i + 1)T_{\text{отпр}})). \quad (6)$$

На рисунке показана плотность распределения расстояния между двумя соседними поездами. Математическое ожидание равно $V^*T_{\text{отпр}}D_{\text{кр}}$ обозначает расстояние, при котором впереди идущий

ший поезд оказывает влияние на созда и идущий. Соответственно, площадь закрашенной фигуры есть вероятность воздействия одного поезда на другой (возникновение коллизии).

Конфигурация $\{X_i\}$ ведет к возникновению коллизии, когда поезда приближаются друг к другу слишком близко, так что

$$X_i - X_{i+1} < D_{кр},$$

где $D_{кр}$ есть критическая дистанция:

$$\begin{aligned} \Pr ob(X_i - X_{i+1} < D_{кр}; t) &= \\ &= \Phi\left(\frac{D_{кр} - VT_{отпр}}{\sigma\sqrt{2t - (2i+1)T_{отпр}}}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Phi(x)$ – стандартная интегральная функция распределения:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (8)$$

Тогда вероятность коллизии для поездов ко времени t :

$$\begin{aligned} \Pr ob(\text{коллизии}; t) &\leq \\ &\leq \Pr ob(\cup\{X_i - X_{i+1} < D_{кр}\}; t) \leq \\ &\leq \sum_{i_{min}} \Phi\left(\frac{D_{кр} - VT_{отпр}}{\sigma\sqrt{2t - (2i+1)T_{отпр}}}\right) \leq \\ &\leq \frac{T_{граф}}{T_{отпр}} \Phi\left(\frac{D_{кр} - VT_{отпр}}{\sigma\sqrt{2T_{граф}}}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Число поездов, проходящих за день,

$$\text{есть } N_T = \frac{T_{день}}{T_{отпр}};$$

$$\Pr ob(\text{коллизии}) \leq \frac{T_{граф} N_T}{T_{отпр}} \Phi\left(\frac{D_{кр} - V \frac{T_{день}}{N_T}}{\sigma\sqrt{2T_{граф}}}\right). \quad (10)$$

Граница $D_{кр}$ должна быть выбрана в зависимости от используемой системы сигнализации:

- для трехзначной системы сигнализации – $D_{кр} = 2L_{section} + L_{поезда}$;
- для системы сигнализации с подвижными блок-участками (теоретический подход) – $D_{кр} = f_{stop}(V)$;
- для системы сигнализации с подвижными блок-участками (моделирующий подход) – $D_{кр} = f_{stop}(x_{i+1})$ или $D_{кр} = f_{stop}(x_i, x_{i+1})$.

Моделирование поездов с разными скоростями

Формула, приведенная выше, может быть использована для поездов с раз-

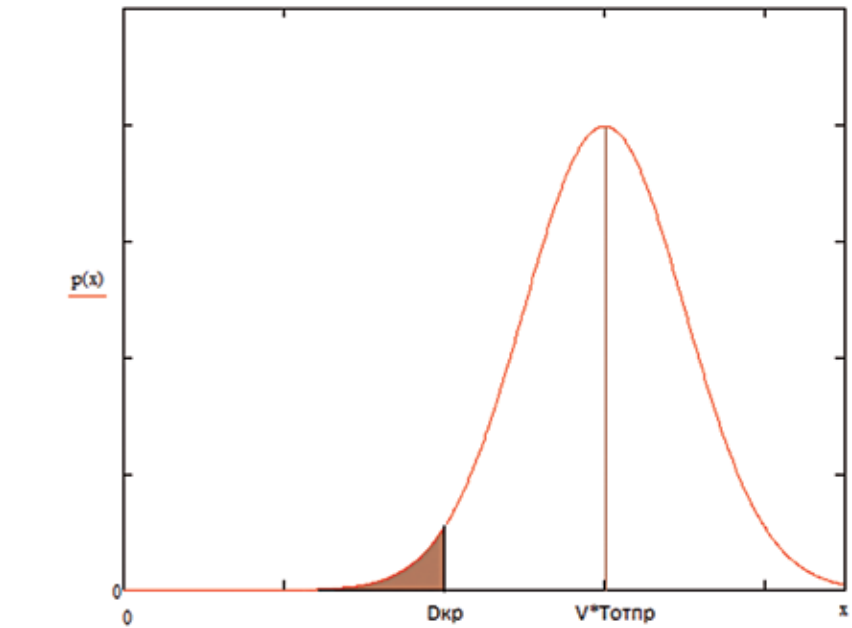


График плотности распределения дистанции между двумя поездами

личными скоростями, потому что расстояние между двумя соседними поездами есть

$$X_i - X_{i+1} \sim N\left(\begin{aligned} &(V_i - V_{i+1})(t - iT_{отпр}) + \\ &+ V_{i+1}T_{отпр}, \sigma^2(2t - (2i+1)T_{отпр}) \end{aligned}\right). \quad (11)$$

Среднее значение расстояния между поездами зависит от дисперсии скорости:

$$\begin{aligned} E[X_i - X_{i+1}] &\in \\ &\in \left[\begin{aligned} &V_{\min} T_{отпр} - T_{граф} \min(\Delta V_i), \\ &V_{\max} T_{отпр} + T_{граф} \max(\Delta V_i) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\min(\Delta V_i) = \min\{V_i - V_{i+1}\}$,

$\max(\Delta V_i) = \max\{V_i - V_{i+1}\}$.

Нижняя граница выражения (12), к которому принадлежит значение нормального распределения, является хорошей заменой для значения $VT_{отпр}$ в формуле (9):

$$VT_{отпр} \rightarrow V_{\min} T_{отпр} - T_{граф} \min(\Delta V_i).$$

Данная подстановка возможна, потому что смысл выражения (9) состоит в определении верхней границы вероятности опасного события.

Моделирование поездов разных классов

Формулу (9) можно использовать и для поездов различных классов с разной дисперсией σ_i , так как расстояние между поездами есть

$$X_i - X_{i+1} \sim N\left(\begin{aligned} &VT_{отпр}, \sigma_i^2(t - iT_{отпр}) + \\ &+ \sigma_{i+1}^2(t - (i+1)T_{отпр}) \end{aligned}\right). \quad (13)$$

Распределение (13) ограничено сверху значением $(\sigma_i^2 + \sigma_{i+1}^2)T_{граф}$.

Поэтому для поездов различных классов мы можем сделать следующую замену в формуле (9):

$$\sigma\sqrt{2T_{граф}} \rightarrow \sqrt{(\sigma_i^2 + \sigma_{i+1}^2)T_{граф}}.$$

Данная замена возможна, так как целью является определение верхней границы, $D_{кр} - VT_{отпр} < 0$ и интегральная функция распределения является строго возрастающей.

Из формул (9) и (10) следует, что возникновение коллизии зависит от интервала отправления поездов, минимального интервала попутного следования, от дисперсии скорости. Наименьшая вероятность коллизии будет при увеличении интервала следования поездов, уменьшении минимального интервала попутного следования и уменьшении дисперсии скорости. Задавая желаемую вероятность коллизии, минимальный интервал попутного следования и дисперсию скоростей, можно определить интервал следования поездов. ■

Литература

1. Волков И. К., Зуев С. М., Цветкова Г. М. Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. 440 с.
2. Stok R. Estimation of railway capacity consumption using stochastic differential equations. Trieste: Univ. of Trieste, 2005. 109 p.
3. Pachl J. Railway operation and control. Braunschweig: Tech. Univ. at Braunschweig, 2009. 267 p.
4. Abril M., Barber F., Ingolotti L. et al. An assessment of railway capacity. 2008.