

# Анализ напряженно-деформированного состояния судовых корпусных конструкций

А. В. ФАЙВИСОВИЧ, докт. техн. наук, профессор кафедры механики,

Р. А. ПОЧИНКОВ, канд. техн. наук, доцент кафедры механики, Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова



**Разработка численных методов анализа напряженно-деформированного состояния судовых корпусных конструкций позволяет рассчитать остаточную прочность элементов. Метод конечных элементов, основанный на положениях строительной механики, благодаря открытой структуре сравнительно просто реализуется на современных цифровых системах с большими объемами памяти и отличается высоким быстродействием.**

Оценка остаточной прочности элементов конструкций, работающих в реальных эксплуатационных условиях [1; 2], является приоритетной инженерно-технической задачей. Применительно к транспорту особый интерес представляет разработка численных методов анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) судовых корпусных конструкций.

Наиболее перспективным методом, позволяющим оценить НДС судовых конструкций, является метод конечных элементов (МКЭ) [3–6]. На сегодняшний день существует большое количество коммерческих программных продуктов, реализующих основные положения метода: ANSYS [8], NASTRAN [9], COSMOS, FEMLab и т. д. Однако все эти пакеты достаточно дороги и зачастую представляют собой «черные ящики», в

которых исследователь не может что-либо изменить исходя из нужд конкретной задачи. Поэтому большую актуальность приобретает разработка независимых методик анализа НДС судовых корпусных конструкций, в частности на основе МКЭ.

## Подготовка исходных данных для анализа НДС судовых конструкций

Элементы судовых корпусных конструкций имеют толщины много меньше, чем их габаритные размеры, поэтому они могут быть представлены в виде совокупности пластин и оболочек различной толщины (рис. 1).

В соответствии с идеологией МКЭ данные пластины могут быть разбиты на конечное число малых расчетных элементов, имеющих форму плоских пространственных многоугольников. Это эквивалентно замене непрерывной

расчетной модели тела дискретным «сеточным» аналогом с конечным числом параметров в вершинах (узлах) элементов. Данная замена позволяет свести решение задачи теории упругости пластин и оболочек к решению системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка [4; 10]. Основное разрешающее уравнение МКЭ может быть представлено в виде соотношения

$$[K] \times \{u\} = F, \quad (1)$$

где  $\{u\}$  — вектор-столбец искомого узловых перемещений;

$\{F\}$  — глобальный вектор-столбец узловых сил, компоненты которого не равны нулю лишь в ненагруженных узлах;

$[K]$  — глобальная матрица жесткости элементов.

В соответствии с основным уравнением метода (1) расчет НДС элементов судовых корпусных конструкций сводится к определению перемещений узлов в рамках ранее созданных конечно-элементных моделей. Для получения единственного решения матрица жесткости дополняется граничными условиями, обеспечивающими неподвижность конечно-элементной модели в пространстве и предотвращающими вырождение матрицы жесткости вследствие недостаточности связей.

Необходимым условием определения параметров НДС элементов судо-

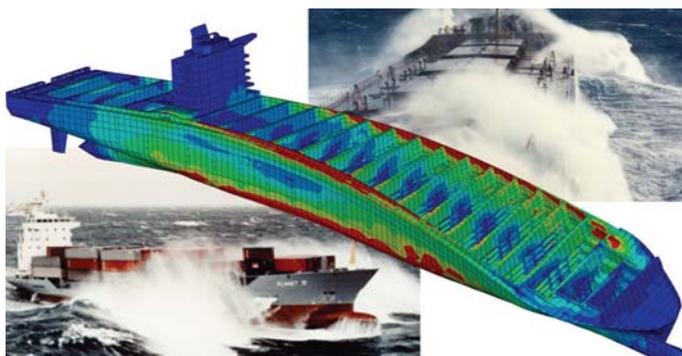


Рис. 1. Геометрическая модель судна

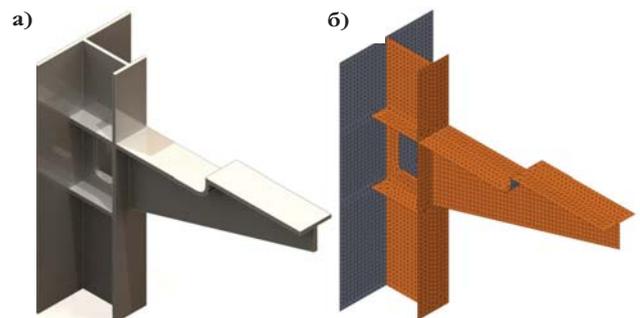


Рис. 2. Подготовка конечно-элементной модели: а — исходный элемент; б — конечно-элементная модель.

$$\begin{aligned}
 \text{Diff\_Matrix\_MF}(n) := & \text{for } j \in 1..3 \\
 & \left| \begin{array}{l} X_j \leftarrow \text{Local\_Coord\_Matrix}(n)_{1,j} \\ Y_j \leftarrow \text{Local\_Coord\_Matrix}(n)_{2,j} \end{array} \right. \\
 & \text{for } k \in 1..3 \\
 & \left| \begin{array}{l} B_k \leftarrow Y_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,2}} - Y_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,3}} \\ C_k \leftarrow X_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,3}} - X_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,2}} \end{array} \right. \\
 \text{Element\_Area} \leftarrow & \frac{1}{2} \cdot \left| (X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_3) - (X_1 - X_3) \cdot (Y_1 - Y_2) \right| \\
 \text{Diff\_Matrix} \leftarrow & \frac{1}{2 \cdot \text{Element\_Area}} \cdot \begin{array}{cccccc} & B_1 & 0 & B_2 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & \\ C_1 & B_1 & C_2 & B_2 & C_3 & B_3 & \end{array}
 \end{aligned}$$

Рис. 3. Матрица дифференцирования Diff\_Matrix\_MF

$$\begin{aligned}
 \text{Diff\_Matrix\_BM}(n, L1, L2, L3) := & \text{for } j \in 1..3 \\
 & \left| \begin{array}{l} X_j \leftarrow \text{Local\_Coord\_Matrix}(n)_{1,j} \\ Y_j \leftarrow \text{Local\_Coord\_Matrix}(n)_{2,j} \end{array} \right. \\
 & \text{for } k \in 1..3 \\
 & \left| \begin{array}{l} B_k \leftarrow Y_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,2}} - Y_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,3}} \\ C_k \leftarrow X_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,3}} - X_{\text{Aux\_Matrix\_A}_{k,2}} \end{array} \right. \\
 \text{Element\_Area} \leftarrow & \frac{1}{2} \cdot \left| (X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_3) - (X_1 - X_3) \cdot (Y_1 - Y_2) \right| \\
 M \leftarrow & \begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} \cdot (B_1)^2 & \frac{1}{2} \cdot (B_2)^2 & \frac{1}{2} \cdot (B_3)^2 & -(B_1 \cdot B_2) & -(B_2 \cdot B_3) & -(B_3 \cdot B_1) \\ \frac{1}{2} \cdot (C_1)^2 & \frac{1}{2} \cdot (C_2)^2 & \frac{1}{2} \cdot (C_3)^2 & -(C_1 \cdot C_2) & -(C_2 \cdot C_3) & -(C_3 \cdot C_1) \\ (B_1 \cdot C_1) & (B_2 \cdot C_2) & (B_3 \cdot C_3) & B_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot B_2 & B_2 \cdot C_3 + C_2 \cdot B_3 & B_3 \cdot C_1 + C_3 \cdot B_1 \\ (L2 + L3) & (B_2 \cdot L3 - B_3 \cdot L2) & (C_2 \cdot L3 - C_3 \cdot L2) & & & \\ -L1 & 0 & 0 & & & \\ -L1 & 0 & 0 & & & \end{array} \\
 \text{Matrix\_A} \leftarrow & \begin{array}{ccc} (L1 - L2) & \frac{1}{4} \cdot (B_2 - B_3) \cdot L3 - B_3 \cdot L1 & \frac{1}{4} \cdot (C_2 - C_3) \cdot L3 - C_3 \cdot L1 \\ 0 & \frac{1}{4} \cdot (B_2 - B_3) \cdot L1 & \frac{1}{4} \cdot (C_2 - C_3) \cdot L1 \\ (L1 - L3) & \frac{1}{4} \cdot (B_2 - B_3) \cdot L2 + B_2 \cdot L1 & \frac{1}{4} \cdot (C_2 - C_3) \cdot L2 + C_2 \cdot L1 \\ -L2 & 0 & 0 \\ (L3 + L1) & (B_3 \cdot L1 - B_1 \cdot L3) & (C_3 \cdot L1 - C_1 \cdot L3) \\ -L2 & 0 & 0 \end{array} \\
 \text{Matrix\_B} \leftarrow & \begin{array}{ccc} (L2 - L1) & \frac{1}{4} \cdot (B_3 - B_1) \cdot L3 + B_3 \cdot L2 & \frac{1}{4} \cdot (C_3 - C_1) \cdot L3 + C_3 \cdot L2 \\ (L2 - L3) & \frac{1}{4} \cdot (B_3 - B_1) \cdot L1 - B_1 \cdot L2 & \frac{1}{4} \cdot (C_3 - C_1) \cdot L1 - C_1 \cdot L2 \\ 0 & \frac{1}{4} \cdot (B_3 - B_1) \cdot L2 & \frac{1}{4} \cdot (C_3 - C_1) \cdot L2 \\ -L3 & 0 & 0 \\ -L3 & 0 & 0 \\ (L1 + L2) & (B_1 \cdot L2 - B_2 \cdot L1) & (C_1 \cdot L2 - C_2 \cdot L1) \end{array} \\
 \text{Matrix\_C} \leftarrow & \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{4} \cdot (B_1 - B_2) \cdot L3 & \frac{1}{4} \cdot (C_1 - C_2) \cdot L3 \\ (L3 - L2) & \frac{1}{4} \cdot (B_1 - B_2) \cdot L1 + B_1 \cdot L3 & \frac{1}{4} \cdot (C_1 - C_2) \cdot L1 + C_1 \cdot L3 \\ (L3 - L1) & \frac{1}{4} \cdot (B_1 - B_2) \cdot L2 - B_2 \cdot L3 & \frac{1}{4} \cdot (C_1 - C_2) \cdot L2 - C_2 \cdot L3 \end{array} \\
 \text{Coord\_Matrix} \leftarrow & \text{augment}(\text{Matrix\_A}, \text{Matrix\_B}, \text{Matrix\_C}) \\
 \text{Diff\_Matrix} \leftarrow & \frac{1}{\text{Element\_Area}^2} \cdot M \cdot \text{Coord\_Matrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 4. Матрица дифференцирования Diff\_Matrix\_BM

вых корпусных конструкций является наличие исходных данных: геометрии исследуемого конструктивного элемента, механических характеристик его конструкционного материала, данных об эксплуатационных нагрузках и условиях закрепления отдельных точек элемента.

Подготовка геометрической модели исследуемого элемента выполняется в одной из современных систем геометрического моделирования (CAD-системы) [11] путем построения его пространственной копии, состоящей из набора плоских (криволинейных) поверхностей, имитирующих исследуемый конструктивный элемент.

В соответствии с идеологией МКЭ строится геометрическая модель, дискретизируемая совокупностью плоских треугольных элементов конечного размера (рис. 2). Дискретизация выполняется в одном из сеточных генераторов, входящих в современные пакеты прочностного анализа (CAE-системы) [12].

### Численный анализ НДС судовых конструкций

Для численного анализа ранее созданной конечно-элементной модели исследуемого конструктивного элемента, входящего в набор корпуса, в соответствии с основным разрешающим уравнением МКЭ необходимо сформировать глобальную матрицу жесткости Glb\_Stiff\_Matrix и глобальный вектор узловых сил Glb\_Load\_Matrix. В общем случае размер глобальной матрицы жесткости, симметричной и положительно определенной, равно как и длина глобального вектора узловых сил, определяется типом применяемых расчетных элементов и их общим числом.

При этом в процессе формирования вышеупомянутых матриц необходимо принимать во внимание одну очень важную особенность НДС судовых корпусных конструкций, заключающуюся в том, что на каждый плоский треугольный элемент действуют как мембранные, так и изгибные усилия. В результате перемещения в локальной плоскости XY' любого элемента могут определяться компонентами только плоского НДС и не зависеть от перемещения вдоль локальной оси Z', равно как и от углов поворота относительно осей X' и Y', и наоборот.

Таким образом, матрицы упругих коэффициентов, связывающих напряжения и деформации в пределах каждого элемента, рассчитывались последовательно: для растяжения-сжатия (под действием мембранных сил) —

$$\text{Elm\_Stiff\_Matrix\_MF}(n) := \text{Thickn}_n \cdot \text{Element\_Area}(n) \cdot \text{Diff\_Matrix\_MF}(n)^T \cdot \text{Elst\_Matrix\_MF}(n) \cdot \text{Diff\_Matrix\_MF}(n)$$

$$\text{Elm\_Stiff\_Matrix\_BM}(n) := \begin{cases} \text{Matrix\_A} \leftarrow \text{Diff\_Matrix\_BM} \left( n, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \cdot \text{Elst\_Matrix\_BM}(n) \cdot \text{Diff\_Matrix\_BM} \left( n, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \text{Matrix\_B} \leftarrow \text{Diff\_Matrix\_BM} \left( n, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)^T \cdot \text{Elst\_Matrix\_BM}(n) \cdot \text{Diff\_Matrix\_BM} \left( n, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \\ \text{Matrix\_C} \leftarrow \text{Diff\_Matrix\_BM} \left( n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)^T \cdot \text{Elst\_Matrix\_BM}(n) \cdot \text{Diff\_Matrix\_BM} \left( n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \\ \text{Matrix} \leftarrow \text{Matrix\_A} + \text{Matrix\_B} + \text{Matrix\_C} \\ \text{Elm\_Stiff\_Matrix} \leftarrow \frac{\text{Element\_Area}(n)}{3} \cdot \text{Matrix} \end{cases}$$

Рис. 5. Матрицы жесткости **Elm\_Stiff\_Matrix\_MF** и **Elm\_Stiff\_Matrix\_BM**

Elst\_Matrix\_MF, а для изгиба (под действием изгибающих моментов) — Elst\_Matrix\_BM. При этом предполагалось, что механические характеристики материала исследуемой конструкции изотропны, а его поведение под нагрузкой описывается линейными зависимостями.

Для получения матриц дифференцирования Diff\_Matrix\_MF (рис. 3) и Diff\_Matrix\_BM (рис. 4), связывающих деформации отдельных элементов расчетной модели с перемещениями их узлов (для случая растяжения-сжатия и изгиба), создавалась матрица преобразования координат Trans\_Matrix, позволяющая преобразовывать глобальные координаты X, Y, Z узлов отдельных расчетных элементов в локальные координаты X', Y', Z'.

Непосредственный переход от глобальных координат к локальным для произвольного расчетного элемента выполнялся посредством матрицы Local\_Coord\_Matrix, а обратный переход — посредством матрицы Global\_Coord\_Matrix.

В соответствии с вышесказанным напряженное состояние, вызванное растяжением-сжатием элемента, однозначно определяется перемещениями его срединной поверхности относительно локальных осей координат X' и Y'. Применение линейных полиномов для связи деформаций в отдельных элементах с перемещениями в их узлах автоматически гарантировало непрерывность перемещений между смежными элементами. Поэтому матрица дифференцирования записывалась в локальной системе координат Diff\_Matrix\_MF.

Аналогичным образом напряженное состояние, вызванное изгибом элемента, полностью описывалось одной величиной — прогибом его срединной поверхности. Здесь условие непрерывности налагалось не только на эту величину, но и на ее производные. Это было необходимо для того, чтобы конечно-элементная модель оставалась сплошной и не появлялись изломы, поэтому обязательным условием для каждой узловой точки явилось выполне-

ние требований равновесия и непрерывности. Для решения данной проблемы в пределах каждого элемента была введена треугольная система координат L1, L2, L3. Каждая координата равнялась отношению расстояния, взятого от выбранной точки треугольного элемента до одной из его сторон к высоте, опущенной на эту сторону из противоположной вершины. В результате матрица дифференцирования Diff\_Matrix\_BM также записывалась в локальной системе координат.

Далее на основании матриц дифференцирования были созданы матрицы жесткости Elm\_Stiff\_Matrix\_MF и Elm\_Stiff\_Matrix\_BM (рис. 5) для отдельных элементов конечно-элементной модели (в локальных координатах).

В связи с тем, что в рассматриваемой задаче исследуется произвольная пространственная конечно-элементная модель, в каждом узле которой соединяются некомпланарные элементы, ранее был введен угол поворота относительно локальной оси Z' и соответствующий ему фиктивный момент относительно этой же оси. Если в каком-то из узлов элемента, пересекающиеся в нем, окажутся компланарны, то в локальных координатах при решении системы уравнений, возникнет равенство 0 = 0, которое приведет к ошибке программы. Во избежание этого была введена фиктивная локальная матрица жесткости Dummy\_Stiff\_Matrix.

Основное уравнение МКЭ представляет собой систему линейных ал-

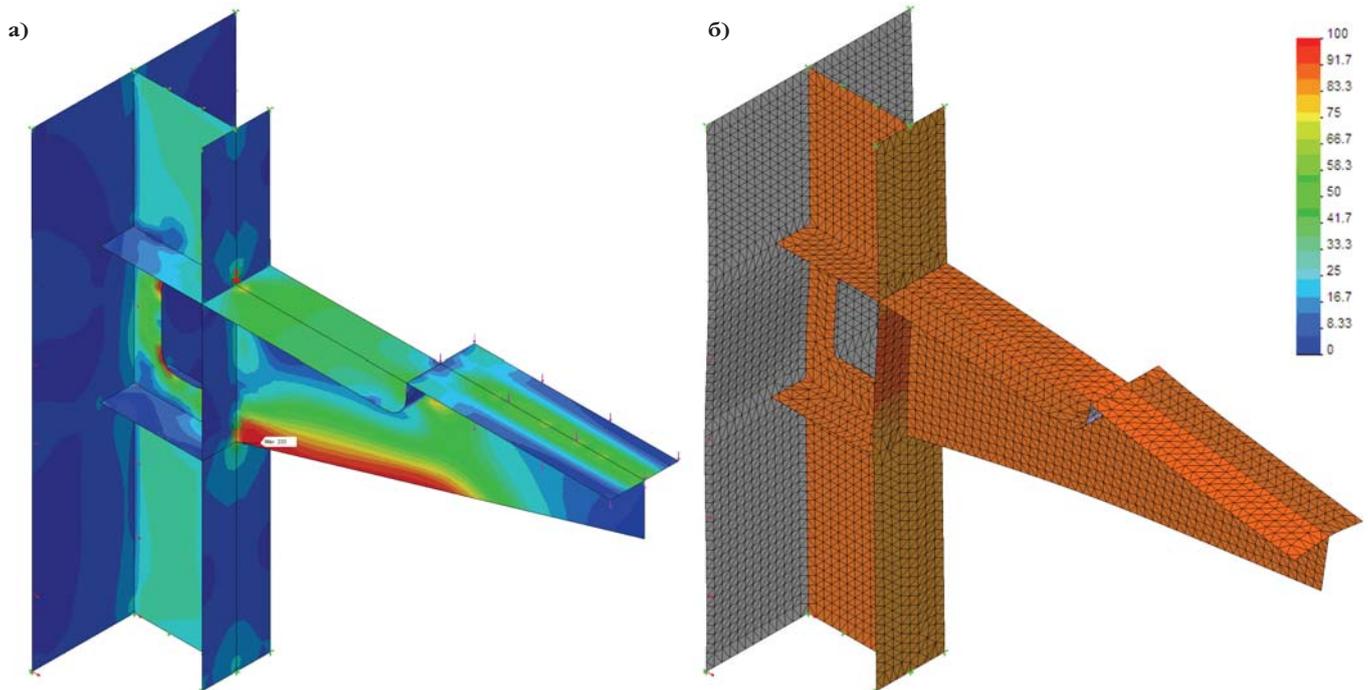


Рис. 6. Результаты расчета состояния: а — напряженного; б — деформированного.

гебраических уравнений, где элементы глобальной матрицы жесткости  $Glb\_Stiff\_Matrix$  умножаются на неизвестные перемещения узлов конечно-элементной модели и приравниваются к глобальному вектору сил  $Glb\_Load\_Matrix$ , действующих в этих узлах.

Если какие-то возможные перемещения были изначально заданы (элементы вектора  $Point\_F\_Dispmnt$ , равные 1), то соответствующие строки и столбцы из глобальной матрицы жесткости и глобального вектора узловых сил перед решением системы уравнений исключались.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений может быть использован итерационный численный метод Левенберга — Маркардта. В результате решения системы уравнений получается матрица перемещений отдельных узлов конечно-элементной модели  $Glb\_Point\_Dispmnt\_Res$ , куда позже были добавлены ранее удаленные строки, содержащие заданные узловые перемещения. Результаты расчета по предложенной методике представлены на рис. 6.

\*\*\*

Изложенная методика позволяет удовлетворительно прогнозировать НДС судовых корпусных конструкций в условиях статического нагружения в предположении, что механические свойства материала изменяются линейно, а деформации малы. Основным преимуществом данной методики является ее открытая структура, предполагающая возможность дальнейшего развития.

Кроме того, данная методика может быть легко реализована в современных математических пакетах (MatLAB, MathCAD, Maple, Mathematica) для решения разнообразных задач теории пластин и оболочек.

Применение подобных систем позволяет избавиться от рутинных процедур, связанных с оптимизацией исходных данных для рациональной нумерации узлов, с получением матриц жесткости с ленточной структурой, с выполнением разнообразных матричных преобразований и разработкой методов быстрого решения многомерных систем линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барабанов Н. В. и др. Повреждения судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977.
2. Барабанов Н. В., Луценко В. Т. Повреждение корпусных конструкций танкеров в Дальневосточном бассейне. Вып. 38. / ДВГУ, НТО им. акад. А. Н. Крылова. Владивосток, 1997.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
6. Сахаров А. С., Альгенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Віща шк., 1982.
7. Мянчиков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. М.: Машиностроение, 1989.
8. Каплун А. Б., Морозов М. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
9. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC.Visual Nastran for Windows. М.: ДМК Пресс, 2004.
10. Smith I. M., Griffiths D. V. Programming the Finite Element Method. London: John Wiley and Sons Ltd., 2004.
11. Ли К. Основы САПР: CAD, CAM, CAE. СПб.: Питер, 2004.
12. Frey P. G., George P. L. Mesh generation: application to Finite Elements. Oxford: Hermes Sci., 2000.

Наш новый проект — федеральный журнал

Специализированное издание  
о достижениях отечественной науки  
и производства по всем видам транспорта

# НАУКА и ТРАНСПОРТ

Целевая аудитория —  
ведущие специалисты  
транспортного комплекса  
и смежных отраслей.

График выхода издания и темы номеров:  
 15.02.2012 **Гражданская авиация**  
 30.03.2012 **Морской и речной транспорт**  
 31.05.2012 **Модернизация железнодорожного транспорта**  
 31.07.2012 **Городской пассажирский транспорт**  
 28.09.2012 **Транспортное строительство**  
 30.11.2012 **IT-технологии на транспорте**

Тираж 7000 экз.  
 Формат А4  
 Периодичность  
 6 номеров в год  
 Полноцветная печать

По вопросам подписки и размещения рекламы обращайтесь в редакцию:  
 ООО «Т-ПРЕССА», 190031, Санкт-Петербург, Московский пр. д.9, офис 8-149  
 Тел. (812)310-40-97 [www.rostransport.com](http://www.rostransport.com)